

Catatan Kuliah Persamaan Diferensial

Minggu 4: Persamaan Diferensial Biasa Orde 2 Linier Homogen

Novalio Daratha
Program Studi Teknik Elektro
Universitas Bengkulu

2026

Contents

1	Pendahuluan	2
2	Materi Utama	2
2.1	Bentuk Umum	2
2.2	Persamaan Karakteristik	2
2.3	Tiga Kasus Solusi Umum	2
3	Ringkasan	3
4	Referensi	3

1 Pendahuluan

Persamaan Diferensial Orde 2 banyak muncul dalam pemodelan sistem dinamik yang memiliki elemen penyimpan energi ganda, seperti rangkaian RLC pada Teknik Elektro maupun sistem massa-pegas pada mekanika. Pada minggu ini, kita akan berfokus pada Persamaan Diferensial Biasa (PDB) Orde 2 Linier Homogen dengan Koefisien Konstan. Pemahaman terhadap metode persamaan karakteristik menjadi kunci untuk menganalisis respons natural dari sistem orde dua.

2 Materi Utama

2.1 Bentuk Umum

Bentuk umum PDB Orde 2 Linier dengan Koefisien Konstan adalah:

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = f(x)$$

Jika $f(x) = 0$, maka persamaan disebut **Homogen**. Sehingga bentuk PDB linier orde 2 homogen adalah:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

dengan a, b, c adalah konstanta real dan $a \neq 0$.

2.2 Persamaan Karakteristik

Solusi untuk PDB jenis ini dicari dalam bentuk fungsi eksponensial $y = e^{rx}$. Dengan mensubstitusikan y , $y' = re^{rx}$, dan $y'' = r^2 e^{rx}$ ke persamaan asli, kita dapatkan:

$$a(r^2 e^{rx}) + b(re^{rx}) + c(e^{rx}) = 0$$

$$e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0$$

Karena $e^{rx} \neq 0$ untuk setiap nilai x , maka haruslah:

$$ar^2 + br + c = 0$$

Persamaan kuadrat ini disebut **Persamaan Karakteristik** (atau Persamaan Pembantu). Akar-akar dari persamaan karakteristik (r_1 dan r_2) menentukan bentuk solusi umum.

2.3 Tiga Kasus Solusi Umum

Diskriminan dari persamaan karakteristik adalah $D = b^2 - 4ac$. Terdapat tiga kasus solusi tergantung nilai D :

Kasus I: Dua Akar Real dan Berbeda ($D > 0$)

Jika $r_1 \neq r_2$ dan keduanya adalah bilangan real, maka basis solusinya adalah $y_1 = e^{r_1 x}$ dan $y_2 = e^{r_2 x}$. Solusi umum:

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

(Dalam analisis rangkaian RLC, kondisi ini bersesuaian dengan sistem *overdamped*).

Kasus II: Akar Kembar / Real Sama ($D = 0$)

Jika $r_1 = r_2 = r$, maka solusi basisnya adalah $y_1 = e^{rx}$ dan agar linier independen, solusi kedua dikalikan x , menjadi $y_2 = xe^{rx}$. Solusi umum:

$$y(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx} = (C_1 + C_2 x) e^{rx}$$

(Kondisi ini bersesuaian dengan sistem *critically damped*).

Kasus III: Akar Kompleks Konjugat ($D < 0$)

Jika akar-akar tersebut kompleks berbentuk $r_1 = \alpha + i\beta$ dan $r_2 = \alpha - i\beta$ dengan $\alpha = -\frac{b}{2a}$ dan $\beta = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$. Menggunakan identitas Euler ($e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$), solusi umumnya dapat ditulis dalam bentuk sinus dan kosinus beramplitudo eksponensial. Solusi umum:

$$y(x) = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

(Kondisi ini bersesuaian dengan sistem *underdamped*, menunjukkan osilasi yang meluruh jika $\alpha < 0$).

Contoh 2.1. Tentukan solusi umum PDB: $y'' + 5y' + 6y = 0$

Penyelesaian:

Persamaan karakteristik: $r^2 + 5r + 6 = 0$

Faktorisasi: $(r + 2)(r + 3) = 0 \implies r_1 = -2, r_2 = -3$

Karena $r_1 \neq r_2$ real (Kasus I), maka solusi umumnya adalah:

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$$

3 Ringkasan

Penyelesaian PDB Orde 2 Linier Homogen dengan Koefisien Konstan didasarkan pada pencarian akar-akar dari Persamaan Karakteristik $ar^2 + br + c = 0$. Bentuk solusi umum dijamin secara eksklusif jatuh ke dalam tiga kasus: akar real berbeda (sistem *overdamped*), akar kembar (sistem *critically damped*), atau akar kompleks konjugat (sistem *underdamped*).

4 Referensi

- Erwin Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, John Wiley & Sons.
- Dennis G. Zill, *A First Course in Differential Equations with Modeling Applications*, Cengage Learning.