

# Persamaan Diferensial

Minggu 7: Invers Laplace & Solusi PDB dengan Laplace

Novalio Daratha  
Program Studi Teknik Elektro  
Universitas Bengkulu

2026

# Outline

- 1 Invers Transformasi Laplace
- 2 Pecahan Parsial (Partial Fraction)
- 3 Menyelesaikan PDB dengan Laplace
- 4 Contoh Kasus Rangkaian Listrik

# Invers Transformasi Laplace

## Definisi

Jika  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ , maka invers transformasi Laplace ditotasikan dengan  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ .

Pasangan umum Transformasi Laplace dan Inversnya:

- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1$
- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^n}\right\} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$
- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at}$
- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right\} = \sin(\omega t)$
- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+\omega^2}\right\} = \cos(\omega t)$

## Pecahan Parsial

Seringkali bentuk  $F(s)$  merupakan fungsi rasional yang kompleks. Kita perlu mengurainya menjadi bentuk yang lebih sederhana (pecahan parsial) untuk mencari inversnya.

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

Bentuk faktor penyebut  $Q(s)$ :

- **Akar real berbeda:**  $\frac{A}{s-a} + \frac{B}{s-b}$
- **Akar berulang:**  $\frac{A}{(s-a)^2} + \frac{B}{s-a}$
- **Akar kompleks konjugat:**  $\frac{As+B}{s^2+as+b}$

# Menyelesaikan PDB dengan Transformasi Laplace

## Langkah-langkah Penyelesaian PDB:

- ① Terapkan Transformasi Laplace pada kedua sisi persamaan diferensial.
- ② Gunakan kondisi awal (Initial Conditions):
  - $\mathcal{L}\{y'(t)\} = sY(s) - y(0)$
  - $\mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$
- ③ Susun persamaan aljabar untuk mendapatkan persamaan  $Y(s)$ .
- ④ Terapkan Invers Transformasi Laplace pada  $Y(s)$  untuk mendapatkan  $y(t)$ .

## Keuntungan

Transformasi Laplace mengubah persamaan diferensial menjadi persamaan aljabar, dan kondisi awal (initial conditions) langsung dilibatkan dalam proses komputasi.

# Aplikasi pada Rangkaian RLC

Diberikan suatu persamaan diferensial dari rangkaian listrik seri:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 3 \frac{di}{dt} + 2i = 0$$

dengan  $i(0) = 0$  dan  $i'(0) = 2$ .

**Penyelesaian Laplace:**

$$[s^2 I(s) - s(0) - 2] + 3[sI(s) - 0] + 2I(s) = 0 \quad (1)$$

$$(s^2 + 3s + 2)I(s) = 2 \implies I(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} \quad (2)$$

Gunakan pecahan parsial:

$$I(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2} \quad (3)$$

Invers Laplace:  $i(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t}$ .

## Terima Kasih

Sesi Tanya Jawab

Novalio Daratha  
Program Studi Teknik Elektro  
Universitas Bengkulu