

Persamaan Diferensial

Minggu 14: Fungsi Khusus 1 (Persamaan Bessel & Gelombang Silinder)

Novalio Daratha
Program Studi Teknik Elektro
Universitas Bengkulu

2026

Outline

- 1 Koordinat Silinder & Laplacian
- 2 Persamaan Diferensial Bessel
- 3 Fungsi Bessel & Sifatnya

Koordinat Silinder & Laplacian

Sistem Koordinat Silinder

Sistem koordinat silinder (r, θ, z) sering digunakan pada masalah dengan simetri aksial seperti pandu gelombang bulat atau kabel koaksial. Operator Laplacian dalam koordinat silinder:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

Pemisahan Variabel

Dengan asumsi pemisahan variabel $V(r, \theta, z) = R(r)\Theta(\theta)Z(z)$, komponen radial $R(r)$ sering kali menghasilkan Persamaan Diferensial Bessel.

Persamaan Diferensial Bessel

Persamaan diferensial orde dua linier yang dikenal sebagai Persamaan Bessel orde ν :

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad (2)$$

Atau dalam variabel r :

$$r^2 R'' + rR' + (k^2 r^2 - \nu^2)R = 0 \quad (3)$$

Solusi Umum:

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x) \quad (4)$$

di mana $J_\nu(x)$ adalah Fungsi Bessel Jenis Pertama dan $Y_\nu(x)$ adalah Fungsi Bessel Jenis Kedua.

Fungsi Bessel & Aplikasi Gelombang Silinder

Karakteristik Fungsi Bessel

- $J_\nu(x)$: Bernilai berhingga saat $x \rightarrow 0$. Berperilaku menyerupai osilasi yang meluruh amplitudonya seiring meningkatnya x ("trigonometri silinder").
- $Y_\nu(x)$: Bernilai singular (menuju $-\infty$) saat $x \rightarrow 0$. Oleh karena itu, $Y_\nu(x)$ sering diabaikan jika origin ($r = 0$) termasuk dalam domain masalah fisis.

Aplikasi pada Gelombang Silinder

Pada perambatan gelombang dalam rongga silindris (misal drum bergetar atau pandu gelombang elektromagnetik melingkar), pola medan arah radial secara alami mengikuti bentuk fungsi Bessel $J_m(k_{mn}r)$.

Terima Kasih

Sesi Tanya Jawab

Novalio Daratha
Program Studi Teknik Elektro
Universitas Bengkulu