

Persamaan Diferensial

Minggu 13: Persamaan Laplace 2D (Distribusi Potensial Elektrostatik)

Novalio Daratha
Program Studi Teknik Elektro
Universitas Bengkulu

2026

Outline

- 1 Persamaan Laplace 2D
- 2 Metode Pemisahan Variabel
- 3 Aplikasi Elektrostatik

Persamaan Laplace 2D

Definisi Persamaan Laplace

Persamaan Laplace adalah PDP orde dua yang menggambarkan keadaan tunak (steady-state) tanpa sumber. Dalam elektrostatik (tanpa muatan bebas), potensial V memenuhi:

$$\nabla^2 V = 0 \quad (1)$$

Koordinat Kartesian 2D

Jika potensial hanya bergantung pada koordinat x dan y , maka:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad (2)$$

Persamaan ini sangat penting untuk mencari distribusi potensial di antara elektroda pada penampang dua dimensi.

Metode Pemisahan Variabel

Kita asumsikan solusi berbentuk perkalian fungsi x dan y :

$$V(x, y) = X(x)Y(y) \quad (3)$$

Substitusi ke Persamaan Laplace menghasilkan:

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0 \implies \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = k^2 \quad (4)$$

Dua Persamaan Diferensial Biasa (PDB):

- $\frac{d^2 X}{dx^2} - k^2 X = 0$
- $\frac{d^2 Y}{dy^2} + k^2 Y = 0$

Konstanta pemisahan k^2 ditentukan oleh syarat batas fisik dari sistem.

Solusi Umum Berdasarkan k

Tergantung tanda konstanta, kita mendapatkan kombinasi fungsi sinus/kosinus dan fungsi hiperbolik eksponensial:

- Jika $k^2 > 0$: $X(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}$, $Y(y) = C \sin(ky) + D \cos(ky)$ (atau sebaliknya)
- Jika $k^2 = 0$: $X(x) = Ax + B$, $Y(y) = Cy + D$

Syarat Batas (Boundary Conditions)

Syarat batas sangat penting untuk menentukan koefisien A, B, C, D dan konstanta pemisahan k .

- Syarat Dirichlet: Nilai potensial V diketahui pada batas.
- Syarat Neumann: Turunan potensial (medan listrik) diketahui pada batas.

Solusi akhirnya merupakan superposisi (Deret Fourier) dari solusi-solusi fundamental.

Terima Kasih

Sesi Tanya Jawab

Novalio Daratha
Program Studi Teknik Elektro
Universitas Bengkulu