

Persamaan Diferensial

Minggu 12: Persamaan Panas 1D (Difusi Termal pada Kabel)

Novalio Daratha
Program Studi Teknik Elektro
Universitas Bengkulu

2026

Outline

- 1 Persamaan Diferensial Panas (Difusi)
- 2 Penyelesaian dengan Pemisahan Variabel
- 3 Solusi Umum

Persamaan Panas 1D

Bentuk Dasar

Persamaan panas (heat equation) atau persamaan difusi memodelkan bagaimana distribusi suhu dalam medium (seperti konduktor kabel listrik) berubah seiring waktu.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

di mana $u(x, t)$ adalah suhu pada posisi x dan waktu t , dan α adalah difusivitas termal material konduktor.

Fenomena Fisis

Berbeda dengan persamaan gelombang, persamaan panas mendeskripsikan proses ireversibel di mana suhu akan cenderung mencapai titik setimbang (steady-state). Kalor merambat dari daerah bersuhu tinggi ke daerah bersuhu rendah.

Penyelesaian dengan Metode Pemisahan Variabel

Misalkan konduktor kabel memiliki panjang L , dengan kedua ujungnya dipertahankan pada suhu 0° . Kondisi batas: $u(0, t) = 0$ dan $u(L, t) = 0$. Dengan substitusi $u(x, t) = X(x)T(t)$:

$$\frac{T'}{\alpha T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2$$

Didapatkan dua persamaan diferensial biasa:

- Spasial: $X'' + \lambda^2 X = 0 \implies X(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$
- Temporal: $T' + \alpha\lambda^2 T = 0 \implies T(t) = e^{-\alpha\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$

Solusi Umum Distribusi Suhu

Solusi Bentuk Deret Fourier

Menggunakan superposisi, solusi umum suhu di sepanjang kabel adalah:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\alpha\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \quad (2)$$

Penting: Bentuk $e^{-\text{konstanta} \cdot t}$ menunjukkan peluruhan temporal. Hal ini mengindikasikan bahwa untuk waktu $t \rightarrow \infty$, suhu konduktor pada akhirnya akan turun menjadi 0 di setiap titik jika tidak ada sumber panas konstan.

Terima Kasih

Sesi Tanya Jawab

Novalio Daratha
Program Studi Teknik Elektro
Universitas Bengkulu