

Pemodelan Stokastik Linier: AR, MA, dan ARMA

Representasi Operator Polinomial, Analisis Kestabilan Bidang Z, dan Kriteria AIC/BIC

Ir. Novalio Daratha, S.T., M.Sc., Ph.D.

Program Studi Teknik Elektro – Fakultas Teknik
Universitas Bengkulu

Minggu 4 / Semester Ganjil 2026

Agenda Perkuliahan Minggu ke-4

Capaian Pembelajaran (Sub-CPMK 4)

Mahasiswa mampu menyusun formulasi matematis model $AR(p)$, $MA(q)$, dan $ARMA(p, q)$, menganalisis kestabilan dan invertibilitas pada bidang Z , serta memilih ordo optimal menggunakan kriteria informasi AIC/BIC.

- 1 Model AutoRegressive ($AR(p)$)
- 2 Model Moving Average ($MA(q)$)
- 3 Model Gabungan $ARMA(p, q)$
- 4 Kestabilan & Bidang Z (Karakteristik Fisik)
- 5 Kriteria Informasi: AIC, AICc, dan BIC
- 6 Diagnostik Residu & Implementasi Python

Model AutoRegressive (AR(p))

Nilai sekarang y_t diregresikan terhadap nilai masa lalu $y_{t-1}, \dots, y_{t-p}$:

Persamaan AR(p)

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \epsilon_t \quad \text{di mana } \epsilon_t \sim \mathcal{WN}(0, \sigma^2) \quad (1)$$

Notasi Operator Lag (B):

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) y_t = c + \epsilon_t \quad (2)$$

$$\Phi(B) y_t = c + \epsilon_t$$

Pola Correlogram AR(p):

- **ACF**: Meluruh secara eksponensial (*tail off*).
- **PACF**: Terpotong tajam (*cut off*) tepat setelah $lag = p$.

Estimasi Parameter AR(p) Murni: Persamaan Yule-Walker

Untuk model AR(p) murni, parameter $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ dapat diestimasi secara deterministik menggunakan autokorelasi sampel (ρ_k) melalui sistem persamaan **Yule-Walker**:

Bentuk Matriks Yule-Walker (Sistem Toeplitz)

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{p-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{p-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \rho_{p-3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \vdots \\ \phi_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \vdots \\ \rho_p \end{bmatrix} \implies \mathbf{R}\phi = \mathbf{r} \quad (3)$$

- Solusi analitik didapatkan via Inversi Matriks: $\phi = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}$
- Estimasi variansi *white noise*: $\sigma^2 = \gamma_0 (1 - \sum_{i=1}^p \phi_i \rho_i)$

Model Moving Average (MA(q))

Nilai sekarang y_t dimodelkan sebagai kombinasi linier dari kesalahan acak masa lalu:

Persamaan MA(q)

$$y_t = \mu + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \epsilon_{t-q} \quad (4)$$

Dalam operator lag: $y_t = \mu + \Theta(B)\epsilon_t$ dengan $\Theta(B) = 1 + \theta_1 B + \cdots + \theta_q B^q$.

Pola Correlogram MA(q):

- **ACF**: Terpotong tajam (*cut off*) setelah $lag = q$.
- **PACF**: Meluruh lambat (*tail off*).

Invertibilitas MA: Memastikan derau acak masa lalu dapat diestimasi dari observasi sinyal nyata yang terukur.

Kestabilan Sistem Dinamis pada Bidang Z

Sebagai insinyur elektro, model ARMA identik dengan filter IIR (Infinite Impulse Response):

Syarat Stasioneritas & Kestabilan

Akar-akar polinomial karakteristik $\Phi(B) = 0$ harus berada **di luar lingkaran satuan** ($|B_i| > 1$) pada bidang B , atau akar-akar pada bidang Z ($z = B^{-1}$) harus berada **di dalam lingkaran satuan** ($|z_i| < 1$):

$$1 - \phi_1 z^{-1} - \phi_2 z^{-2} - \dots - \phi_p z^{-p} = 0 \implies |z_i| < 1 \quad (5)$$

Contoh Kasus AR(1): $y_t = \phi_1 y_{t-1} + \epsilon_t$

- Jika $|\phi_1| < 1$: Sistem stabil dan stasioner.
- Jika $|\phi_1| = 1$: Sistem *Random Walk* (Non-stasioner/Marginally Stable).
- Jika $|\phi_1| > 1$: Sistem tak stabil (*Explosive System*).

Kriteria Informasi untuk Seleksi Ordo (AIC & BIC)

Untuk memilih kombinasi ordo (p, q) terbaik tanpa terjadi *overfitting*:

Akaike Information Criterion (AIC)

$$\text{AIC} = -2 \ln(\hat{L}) + 2k \quad (6)$$

$k = p + q + 1$ (jumlah parameter terestimasi), $\hat{L}$ adalah nilai maksimum fungsi *likelihood*.

Bayesian Information Criterion (BIC)

$$\text{BIC} = -2 \ln(\hat{L}) + k \ln(N) \quad (7)$$

Memberikan penalti lebih ketat untuk model yang terlalu kompleks pada dataset besar (N).

Kaidah Keputusan: Pilih model dengan nilai AIC / BIC terkecil!

Implementasi Python: Estimasi Model ARMA

```
from statsmodels.tsa.arima.model import ARIMA
import pandas as pd

# Load data stasioner (misal sinyal getaran motor)
df = pd.read_csv('vibration_stationary.csv')

# Grid Search ordo (p, q) berdasarkan nilai AIC minimum
best_aic, best_order = float("inf"), None
for p in range(1, 4):
    for q in range(1, 4):
        try:
            model = ARIMA(df['signal'], order=(p, 0, q)).fit()
            if model.aic < best_aic:
                best_aic = model.aic
                best_order = (p, q)
        except:
            continue

print(f"Model Terbaik: ARMA{best_order} dengan AIC: {best_aic:.2f}")

# Fitting model optimal & tampilkan akar karakteristik
final_model = ARIMA(df['signal'], order=(best_order[0], 0, best_order[1])).fit()
print(final_model.summary())
```

Rangkuman & Persiapan Minggu ke-5

Poin Kunci Minggu 4

- Model AR mengaitkan sinyal masa kini dengan histori masa lalu; model MA mengaitkan dengan histori galat derau.
- Kestabilan ARMA identik dengan kestabilan filter digital IIR (kutub di dalam lingkaran satuan bidang Z).
- Nilai AIC dan BIC menjadi kompas penentu ordo parsimonius (*Occam's razor*).

Materi Minggu Depan (Minggu ke-5)

Model ARIMA & SARIMA Box-Jenkins: Integrasi diferensiasi (d) dan komponen musiman $(P, D, Q)_s$ untuk data beban listrik nyata berkala mingguan.

Terima Kasih

Pertanyaan & Diskusi Terkait Pemodelan ARMA

Laboratorium Sistem Tenaga & Komputasi Cerdas
Jurusan Teknik Elektro – Universitas Bengkulu